

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЭГШИТГЭЛ XII.12.11(I-II)P

Функцийн уламжлал олох үйлдлийг дифференциалчлах үйлдэл гэнэ.

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \rightarrow df(x) = f'(x)dx \text{ -ийг } f(x) \text{ -функцийн дифференциал гэнэ.}$$

Дифференциалчлах үйлдлийн урвуу үйлдэл нь интегралчлах гэдгийг бид өмнө үзсэн.

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C ; \text{ Жишээ нь: } v = S'(t) = \frac{dS}{dt} \rightarrow dS = S'(t)dt = vdt \rightarrow \int dS = \int vdt = S + C$$

Функц ба түүний уламжлалын хамаарлыг илэрхийлсэн тэгшитгэлийг дифференциал тэгшитгэл гэх ба түүнээс интегралчлах үйлдлийн тусламжтайгаар функцийг томъёог гаргаж авахыг дифференциал тэгшитгэл бодох гэдэг. $\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C$ -ийг дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийд, тодорхой нөхцөлийг хангах C-тогтмолын утгыг олж ерөнхий шийдэд орлуулсныг тухайн шийд гэдэг.

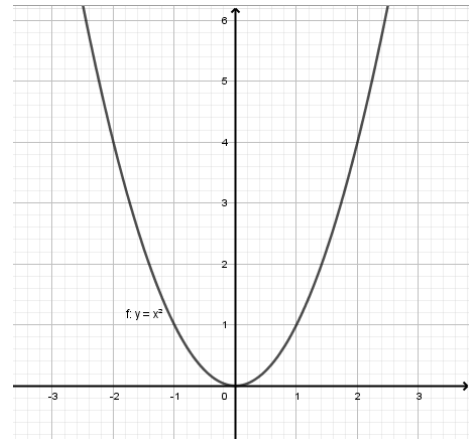
Функцийн графикийн ямар нэг цэг дээрх уламжлал (налалт) нь тухайн цэг дээрх функцийг өөрчлөлтийн хурдыг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл уламжлал нь ямар нэгэн хувьсагчийн нөгөө хувьсагчаас хамаарах өөрчлөлтийн хурдыг илэрхийлдэг.

1. $f(x) = x^2$ функцийг хувьд өгсөн x_0 цэг дээрх уламжлалуудыг олж, өөрчлөлтийн хурд ба графикийн өсөлт бууралттай харьцуулаарай.

x_0	0	1	2	3	-3	-2	-1
$f'(x_0)$	0	2					

$$f'(x_0) = 2x_0 \xrightarrow{x_0=0} f'(0) = 2 \cdot 0 = 0,$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \xrightarrow{x_0=1} f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$



2. Дараах хамаарлыг илэрхийлсэн дифференциал тэгшитгэлүүд зохиож, бодоорой
- a) Өндрөөс унаж буй биеийн хурд V нь хугацаанаас хамаарах өөрчлөлт нь $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$ - чөлөөт уналтын хурдатгалтай шууд пропорциональ.

Хариу: $\frac{dV}{dt} = g, g - \text{const} \rightarrow dV = gdt \rightarrow \int dV = \int gdt \rightarrow V = gt + C$ /C-анхны хурд/

- b) Чөлөөт уналтаар, анхны хурдгүйгээр унаж буй биеийн өндөр h - нь хугацаа t -тэй шууд пропорционалиар өөрчлөгдөнө. (Пропорционалийн коэффициент нь $g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$.)

$$\frac{dh}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- c) Эгц дээш шидэгдсэн биеийн хурд (V)-ны өөрчлөлт нь хугацаа (t)-тай шууд пропорционалиар буурдаг.

$$\frac{dV}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- d) Автомашины хурд тогтмол 0.5 м/с^2 хурдатгалаар нэмэгдэж байв.

$$\frac{dS}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

- e) Лабораторид өсгөж буй ашигтай бактерийн тоо N -нь уг тоотой пропорциональ хурдаар нэмэгдэж байв.

$$\frac{dN}{dt} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Дараах дифференциал тэгшитгэлүүдэд өгсөн функцууд шийд болох эсэхийг шалгаарай

Жишээ нь: $\frac{dy}{dx} = xy$, $y = -3e^{x^2}$ Шалгая. $\frac{dy}{dx} = y' = -3 \cdot (e^{x^2})' = -3 \cdot e^{x^2} \cdot (x^2)' = -3 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = -6xe^{x^2}$

$xy = x \cdot (-3e^{x^2}) = -6xe^{x^2}$ буюу $y' = \frac{dy}{dx} = xy$ болох нь батлагдлаа.

3. $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2 + 3$

4. $dy = 6x dx$, $y = 3x^2 + 2$

5. $dy = (2x - 2) dx$, $y = x^2 - 2x$

6. $y'y = x^2$, $y = \sqrt{x^3 + 2}$

$f(y)dy = g(x)dx$ хэлбэрийн тэгшитгэлийг хувьсагч нь ялгагдсан дифференциал тэгшитгэл гэнэ.

Жишээ нь: $y'y = x^2$ тэгшитгэлийн хувьсагчдыг ялгавал: $\frac{dy}{dx} y = x^2 \rightarrow y dy = x^2 dx$

Дараах дифференциал тэгшитгэлүүдийг хувьсагч нь ялгагдсан хэлбэрт оруулаарай.

7. $\frac{dy}{dx} = y - y^2$

8. $y' = x^2 y$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 1}$

Хувьсагч нь ялгагдах дифференциал тэгшитгэлийн ерөнхий шийдийг олж, зөв олсон эсэхээ шалгаараарай.

$\frac{dy}{dx} = (2y - 1)x$

11. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 3x + 1$

Бодолт: хувьсагчдыг ялгаж интегралчилбал:

$\frac{dy}{2y - 1} = x dx \rightarrow \int \frac{dy}{2y - 1} = \int x dx$

$\frac{1}{2} \ln(2y - 1) = \frac{x^2}{2} + c \rightarrow 2y - 1 = e^{x^2 + c} = Ce^{x^2}$

$y = \frac{Ce^{x^2} + 1}{2}$

Шалгая: $\frac{dy}{dx} = (2y - 1)x$ гэдэг нь $y' = (2y - 1)x$

гэсэн үг.

$$y' = \left(\frac{Ce^{x^2} + 1}{2} \right)' = \frac{C2xe^{x^2}}{2} = Cxe^{x^2} \left. \vphantom{\frac{Ce^{x^2} + 1}{2}} \right\} y' = (2y - 1)x$$

$$(2y - 1)x = \left(2 \cdot \frac{Ce^{x^2} + 1}{2} - 1 \right) x = Cxe^{x^2}$$

<p>12. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + 1}$</p>	<p>13. $4 + x \frac{dy}{dx} = y^2$</p>
<p>14. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$</p>	<p>15. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$</p>
<p>Дараах дифференциал тэгшитгэлийн өгсөн нөхцөлийг хангах тухайн шийдийг олоорой.</p>	
<p>Жишээ: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}, y(1) = 2$ Бодолт: $\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{3dx}{x} \rightarrow \ln y = 3 \ln x + c$ $y = e^{3 \ln x + c} = e^{3 \ln x} \cdot e^c \xrightarrow{e^c = C} y = Cx^3$ (Энд $e^{3 \ln x} = (e^{\ln x})^3 = x^3$ болохыг тооцов. Мөн e^c -тогтмол тоог C -ээр тэмдэглэсэн.) $y(1) = 2$ гэсэн нөхцөлөөс: $C \cdot 1^3 = 2 \rightarrow C = 2$ гэж олоон ерөнхий шийд $y = Cx^3$ -д орлуулбал $y = 2x^3$ гэсэн тухайн шийд олдлоо.</p>	<p>16. $y' = -2y, y(0) = 2$</p>
<p>17. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x}{y}, y(1) = 3$</p>	<p>18. $y' = x + \sin x, y(0) = -1$</p>
<p>19. $y'x - 2y = 0, y(-1) = 2$</p>	<p>20. $x dx + y dy = 0, y(2) = 1$</p>

Үнэлгээ:

Дасгалын дугаар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Σ	
Өөрийн үнэлгээ																						
Багшийн үнэлгээ																						

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЭГШИТГЭЛ **ХЦ.12.11(III-IV)**

<i>Дифференциал тэгшитгэлүүдийн ерөнхий шийдийг олоорой.</i>	
<p>Жишээ: $xydx + (x+1)dy = 0$</p> <p>Бодолт: $(x+1)dy = -xydx \rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}$</p> <p>$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x+1} = -\int \frac{(x+1)dx}{x+1}$ (энд</p> <p>$d(x+1) = (x+1)'dx = (x'+1')dx = (1+0)dx = dx$ гэдгийг ашиглав.)</p> <p>$\ln y = -\ln(x+1) + c = -\ln(x+1) + \ln C = \ln \frac{C}{x+1}$</p> <p>Эндээс: $y = \frac{C}{x+1}$;</p>	<p>1. $y' = -xe^x$</p>
<p>2. $9y \cos^2 x dy = dx$</p>	<p>3. $e^{x-y} dx = \frac{1}{x} dy$</p>
<p>4. $\cos^2 x dy - \sin^2 y dx = 0$</p>	<p>5. $(x+1)ydx = (y-1)xdy$</p>
<i>Дараах дифференциал тэгшитгэлийн өгсөн нөхцөлийг хангах тухайн шийдийг олоорой.</i>	
<p>6. $(1+e^x)y' = e^x, y(0) = 0$</p>	<p>7. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{e^y}, y(0) = 1$</p>

<p>8. $x(y+2)y' = \ln x + 1, y(1) = -1$</p>	<p>9. $y' = -xe^x, y(0) = 2$</p>
<p>10. $y'e^{x+y} = 1, y(0) = \ln 2$</p>	<p>11. $x^2 y' = y^2, y(1) = 1$</p>

Бодлогын нөхцөлөөр дифференциал тэгшитгэл зохиож бодоорой.

<p>12. Хүний бие дэх эмийн бодисын хэмжээ тоо хэмжээтэйгээ пропорционалаар хорогддог. Анх 4 мг эм уусан хүний биед тус эмийн бодис 2 цагийн дараа 3мг болсон бол 8 цагийн дараа хэдэн мг болох вэ? <i>Эмийн бодисын хэмжээг N гэвэл түүний хугацаанаас хамаарсан өөрчлөлтийн дифференциал тэгшитгэл $\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot N(t)$</i></p>	<p>13. 2 м/сек хурдтай явж байсан завь өөрийн хурдтай пропорционал эсэргүүцлийн хүчний нөлөөгөөр удааширч 4 секундийн дараа хурд нь 1 м/сек болов. Тэгвэл хэдэн секундын дараа завь зогсох ба энэ хугацаанд хэдэн метр зам туулах вэ? <i>Хурд ба хугацааны хамаарлыг $\frac{dV(t)}{dt} = k \cdot V(t)$ гэсэн дифференциал тэгшитгэлээр илэрхийлээд цааши бодвол:</i></p>
<p>14. Тамирчин жин хасах зорилгоор 10 хоногийн турш эрчимтэй дасгал хийхэд жин нь 90 кг байснаа 80 кг болж багасав. Өдөр бүрийн жингийн алдагдал нь байгаа жиндээ пропорционал гэж тооцоод биеийн жингийн өөрчлөлтийг дифференциал тэгшитгэлээр илэрхийлээрэй. Энэ эрчмээрээ 20 хоног хичээллэвэл жин хэд хүртэл буурах вэ?</p>	<p>15. Хотын хүн амын өсөлт тухайн жилийн хүн амын тоотой пропорциональ байв. 1 сая хүнтэй хотын хүн ам 1 жилд 100 мянгаар нэмэгдсэн бол 5 жилийн дараа тус хот хэдэн хүн амтай болох вэ? Хүн амын өсөлтийн муруйг тоймлон зураарай.</p>

Үнэлгээ:

Дасгалын дугаар	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
Өөрийн үнэлгээ																
Багшийн үнэлгээ																